УДК 621.923

Молчанов В. Ф., Чернишов О. В.

ПОСТАНОВКА НЕСТАЦІОНАРНОЇ ГРАНИЧНОЇ ЗАДАЧІ ФІЛЬТРАЦІЇ РІДИНИ У ПОРИСТОМУ СЕРЕДОВИЩІ

У сучасному машинобудуванні при механічній обробці деталей машин технічний прогрес передбачає вдосконалення технологій з метою підвищення якості і зниження собівартості продукції. На фінішних операціях металообробки важливого значення набуває широке застосування мастильно-охолоджуючих рідин. На підприємствах машинобудування використовуються високопродуктивні агрегати і верстати, в яких основним технологічним елементом є рідина. В процесі їх роботи технологічні рідини безперервно і інтенсивно забруднюються твердими частками металообробки.

Відомо, що тверді частки шламу, що потрапили разом з рідиною в зону контакту абразивних зерен шліфувального круга з поверхнею заготовки, деформуються самі і впливають на деформацію матеріалу оброблюваної поверхні, що призводить до утворення припалювання оброблених поверхонь [1]. Для виключення припалювання поверхонь при шліфуванні, зменшення шорсткості поверхні і забезпечення мастильно-охолоджуючих рідин у відповідному робочому стані забруднені рідини необхідно очищати від твердих часток металообробки. Із збільшенням кількості мастильно-охолоджуючих рідин, які використовують в машинобудуванні, відповідно зростають і вимоги до технології і апаратного оснащення систем очистки. Для відновлення вихідних параметрів і властивостей технологічні рідини очищають від механічних домішок. Найбільш широке застосування отримують способи очистки технологічних рідин фільтрацією [2].

Використання фільтрації для очистки і освітлення технологічних рідин найефективніше, тому що при фільтрації через шар пористих матеріалів можна досягти повного видалення твердих часток з рідин [3]. Проте особливості будови порового простору обумовлюють ряд специфічних явищ, що виникають при русі рідин в каналах порового середовища.

Метою роботи є вивчення і встановлення закономірності процесу фільтрації технологічних рідин через пористі матеріали. При фільтрації технологічних рідин через шар пористих матеріалів пористе середовище фільтрувальної перегородки змінюється із зміною його пористості. Зміна пористості відбувається за рахунок зменшення об'єму пор порового простору, оскільки тверді частки разом з рідиною проникають в пори каналів порового простору і зависають в ньому.

У даній моделі, процес фільтрації шламової суспензії протікає з постійним закупорюванням пор фільтрувальної перегородки. При фільтрації з поступовим закупорюванням пір на фільтрувальну перегородку об'ємом $W_ф$, м^3, в якій міститься шар сипкого пористого матеріалу пористістю $П$, безперервно поступає технологічна рідина з швидкістю $W_ж$, м^3 за хвилину, в якій містяться тверді частки масою $к_з$, кг. Тверді частки, що поступають з рідиною в пори каналів фільтрувальної перегородки, зависають і затримуються в ній, а відфільтрована рідина продовжує рухатися з тією ж швидкістю. Тверді частки, що зависли в порах каналів фільтрувальної перегородки, змінюють її пористість і впливають на тривалість процесу фільтрації [4,5].

Для визначення пористості фільтрувальної перегородки у будь-який момент часу і тривалості процесу фільтрації рідини через фільтрувальний шар, необхідно знати масу твердих часток, що зависли в порах сипкого пористого матеріалу фільтрувальної перегородки. Для цього за незалежне змінне приймемо час *t*, а за невідому функцію *y(t)* – масу твердих часток, що зависли в порах каналів фільтрувальної перегородки через *t* хвилин після початку

процесу фільтрації. Визначимо, наскільки зміниться маса твердих часток домішок в фільтрувальній перегородці за проміжок часу від t до моменту $(t + \Delta t)$.

За одну хвилину на фільтрувальну перегородку поступає $W_{ж}$, м^3 забрудненої рідини, а за Δt хвилин - $W_{ж}\cdot\Delta t$, м^3 і в цих $W_{ж}\cdot\Delta t$, м^3 рідині міститься $к_з\cdot W_{ж}\cdot\Delta t$, кг твердих часток домішок. З іншого боку, за час Δt через фільтрувальну перегородку протікає $W_{ж}\cdot\Delta t$, м^3 відфільтрованої рідини.

У момент часу t у всій фільтрувальній перегородці об'ємом $W_{ф}$, м^3 міститься $y(t)$, кг твердих часток домішок. Отже, в об'ємі $W_{ф}\Delta t$, м^3 містилося б $W_{ф}\Delta t\cdot$y(t), кг твердих часток домішок, якби за час Δt кількість твердих часток у фільтрувальній перегородці не зростала. Але оскільки маса твердих часток домішок за цей час зростає на величину δ, нескінченно малу при $\Delta t \to 0$, то і в об'ємі $W_{ж}\Delta t$, м^3 рідини міститиметься $W_{ж}\cdot\Delta t\left[y(t)+\delta\right]$, кг твердих часток домішок, де $\delta \to 0$, при $\Delta t \to 0$.

Отже в рідині, що поступає на фільтрувальну перегородку за проміжок часу $(t, t+\Delta t)$, міститься $к_з\cdot W_{ж}\cdot\Delta t$, кг твердих часток домішок, а в об'ємі пористого шару фільтрувальної перегородки, яку заповнює рідина, міститься $W_{ж}\cdot\Delta t\left[y(t)+\delta\right]$, кг твердих часток домішок.

Приріст твердих часток домішок за час $\left[y(t+\Delta t)-y(t)\right]$ дорівнює різниці даних величин, тобто

$$\left[y(t+\Delta t)-y(t)\right]=к_з W_{ж}\cdot\Delta t - W_{ж}\cdot\Delta t\left[y(t)+\delta\right].$$

Отримане рівняння розділимо на Δt і перейдемо до граничного значення при $\Delta t \to 0$. У лівій частині рівняння отримаємо похідну $y'(t)$, а в правій – $к_з W_{ж} - W_{ж} y(t)$, так як $\delta \to 0$, при $\Delta t \to 0$.

Отже, маємо диференціальне рівняння

$$y'(t) = к_з W_{ж} - W_{ж} y(t). \qquad (1)$$

Диференціальне рівняння (1) відноситься до лінійних однорідних диференціальних рівнянь [6]. Рішення лінійних однорідних диференціальних рівнянь здійснимо методом розділення перемінних. Для рішення лінійного однорідного диференціального рівняння (1) приведемо його до виду:

$$\frac{dy}{dt} = к_з W_{ж} - W_{ж} y.$$

Проінтегруємо обидві частини цього рівняння і після відповідних перетворень, отримаємо:

$$y(t) = c\cdot e^{-W_{ж}\cdot t} + к_з. \qquad (2)$$

Оскільки, в початковий момент фільтрації, при $t = 0$, тверді частки домішок в фільтрувальній перегородці, були відсутні, то їх маса $y(0)=0$. Вважаючи в рівнянні (2) $t = 0$, знайдемо постійну інтегрування c:

$$y(0) = c\cdot e^{-W_{ж}\cdot 0} + к_з.$$

Звідки $c = -к_з$.

Підставляючи значення *c* в рівняння (2), отримаємо:

$$y(t) = \kappa_з(1 - e^{-W_{ж} \cdot t}).$$

При $t = t_к$, в пористому шарі фільтрувальної перегородки затримається:

$$m_T = \kappa_з(1 - e^{-W_{ж} \cdot t}), \quad (3)$$

де m_T – маса твердих часток, кг

Виведена формула (3) дозволяє визначити масу твердих часток, що осіли і зависли в порах каналів сипкого пористого матеріалу фільтрувальної перегородки у будь-який момент часу процесу фільтрації мастильно-охолоджуючої рідини з твердими частками металообробки і в подальшому вивести закон зміни пористості пористого середовища із наступних міркувань.

Припускаючи, що зміна пористості пропорційна приросту маси твердих часток в пористому шарі фільтрувальної перегородки об'ємом $W_ф$, м^3, отримаємо:

$$dП = \frac{dm_T}{\rho \cdot W_ф}, \quad (4)$$

де ρ – щільність пористого середовища, кг/м^3.

Оскільки при фільтрації водно-шламових суспензій через фільтрувальну перегородку пористе середовище безперервно змінюється і зростає за рахунок твердих часток шламу, то рівняння нерозривності приймає вид:

$$\frac{\partial(\rho_0 u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho_0 v)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho_0 w)}{\partial z} + П\frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho\frac{\partial П}{\partial t} = 0. \quad (5)$$

Підставляючи в рівняння нерозривності значення

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = \frac{d\rho}{dP} \cdot \frac{\partial P}{\partial t};$$
$$\frac{\partial П}{\partial t} = \frac{dП}{dm_T} \cdot \frac{\partial m_T}{\partial t},$$

отримуємо:

$$\frac{\partial(\rho_0 u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho_0 v)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho_0 w)}{\partial z} + П\frac{d\rho}{dP}\frac{\partial P}{\partial t} + \rho\frac{dП}{dm_T}\frac{\partial m_T}{\partial t} = 0. \quad (6)$$

Реальна рідина слабо стислена, тому з достатнім ступенем точності можна записати:

$$\rho - \rho_o = \frac{\rho}{\alpha}(P - P_o). \quad (7)$$

де α – модуль пружності, Н/м^2.

Визначаючи по приведених формулах (3), (4) і (7) значення величин:

$$\frac{\partial m_T}{\partial t} = W_{ж} \cdot к_з \cdot e^{-W_{ж} \cdot t}; \tag{8}$$

$$\frac{dП}{dm_T} = \frac{1}{\rho \cdot W_ф}; \tag{9}$$

$$\frac{d\rho}{dP} = \frac{\rho}{\alpha}, \tag{10}$$

рівняння нерозривності для змінного пористого середовища має наступний вид:

$$\frac{\partial(\rho_0 u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho_0 v)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho_0 w)}{\partial z} + П \frac{\rho}{\alpha} \frac{\partial P}{\partial t} + \frac{к_з \cdot W_{ж} \cdot e^{-W_{ж} \cdot t}}{\rho \cdot W_ф} = 0. \tag{11}$$

Для рішення диференціального рівняння (11) при фільтрації водно-шламової суспензії через пористий шар фільтрувальної перегородки припускаємо, що рух рідини здійснюється в одному напрямі, відповідно прийнятій моделі процесу фільтрації шламової суспензії. Тоді рівняння (11) приймає вид:

$$\frac{\partial(\rho_0 w)}{\partial z} + П \frac{\rho}{\alpha} \frac{\partial P}{\partial t} + \frac{к_з \cdot W_{ж} \cdot e^{-W_{ж} \cdot t}}{\rho \cdot W_ф} = 0. \tag{12}$$

Процес фільтрації водно-шламових суспензій через пористий шар твердих часток фільтрувальної перегородки підкоряється лінійному закону фільтрації – закон Дарсі [7, 8]:

$$w = k_ф \cdot \frac{dP}{dz} \tag{13}$$

де $k_ф$ – коефіцієнт фільтрації, м/с.

Коефіцієнт фільтрації має розмірність швидкості і характеризує властивості фільтрувального матеріалу, для конкретного виду рідини. Слід зазначити, що значення коефіцієнта фільтрації бажано визначати експериментальним шляхом, оскільки запропоновані теоретичні формули не завжди дають достатньо точні результати [9].

Виконуючи відповідні перетворення рівняння фільтрації для перемінного пористого середовища через перепади тиску на фільтрувальну перегородку, отримуємо кінцевий вид даного рівняння фільтрації рідини в перемінному пористому середовищі:

$$\frac{\partial^2 P}{\partial z^2} + П \frac{\rho \cdot g}{\alpha \cdot k_ф \cdot} \frac{\partial P}{\partial t} + \frac{к_з \cdot g \cdot W_{ж} \cdot e^{-W_{ж} \cdot t}}{k_ф \cdot \rho \cdot W_ф} = 0. \tag{14}$$

Таким чином, на підставі закону зміни пористості фільтрувальної перегородки виведено диференціальне рівняння фільтрації рідини в перемінному пористому середовищі. Диференціальне рівняння (14) дозволяє за заданих початкових і граничних умов отримати рішення задачі фільтрації рідини через шар твердих часток перемінного пористого середовища фільтрувальної перегородки в області часових $0 \le t \le T$ та просторових $0 \le z \le L$ значень.

$$P\ (z,\ 0) = P_1; \qquad P\ (0,\ t) = P_1; \qquad P\ (L,\ t) = P_2. \tag{15}$$

На поверхні фільтрувальної перегородки розподіл тиску задається як функція координат і часу *P(z, t)*.

Розподіл тиску на поверхні фільтрувальної перегородки в початковий момент часу фі-

льтрації:

при $t = 0$, $P(z,0) = P_1$.

Оскільки тиск на поверхні фільтрувальної перегородки під час фільтрації підтримують постійним, то:

при $z = 0$, $P(0,t) = P_1$;
при $z = L$, $P(L,t) = P_2$.

Задаючись початковими і граничними умовами, приходимо до постановки граничної задачі фільтрації водно-шламових рідин в перемінному пористому середовищі.

Рішення нестаціонарної задачі (14) з початковими і граничними умовами (15) здійснюємо методом кінцевих різниць [10]. Суть методу полягає в тому, що рішенням задачі є знаходження набору чисел у відповідних точках дискретної множини, де в якості дискретної множини точок використовують сукупність точок перетину прямих ліній.

ВИСНОВКИ

Проведені дослідження дозволили виявити і вивчити закономірності процесу фільтрації технологічних рідин через пористі матеріали.

Виявлені закономірності дозволили встановити закон зміни пористості фільтрувальної перегородки.

На підставі закону зміни пористості фільтрувальної перегородки виведене диференціальне рівняння, яке дозволяє за заданих початкових і граничних умов отримати рішення нестаціонарної задачі фільтрації рідини через шар твердих часток перемінного пористого середовища фільтрувальної перегородки.

СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Худобин Л. В. Влияние загрязнения СОЖ отходами шлифования на прижогообразование / Л. В. Худобин, Е. П. Гульнов // Вестник машиностроения. – 1978. – № 1. – С. 67–68.

2. Полянсков Ю. В. К методике исследования эффективной очистки СОЖ от механических примесей при абразивной обработке / Ю. В. Полянсков, Е. А. Карев // Труды института. Ульяновский политехнический институт. – Куйбышев, 1976. – Вып. 1. – С. 46–54.

3. Молчанов В. Ф. Исследование фильтрации жидкостей через пористые материалы / В. Ф. Молчанов // «Математичні проблеми технічної механіки» Третя Всеукраїнська наукова конференція (матеріали конференції). – Дніпродзержинськ, 2003. – С. 71–72.

4. Молчанов В. Ф. Постановка и решение нестационарной задачи фильтрации жидкостей в пористой среде / В. Ф. Молчанов // Вестник Харьковского национального автомобильно-дорожного университета и Северо-Восточного научного центра Транспортной академии Украины : сборник научных трудов. – Харьков, 2006. – Выпуск 33. – С. 112–115.

5. Молчанов В. Ф. Постановка нестационарной задачи фильтрации жидкостей в пористой среде / В. Ф. Молчанов // Математичне моделювання. Науковий журнал № 1. ДДТУ. – Дніпродзержинськ, 2014. – С. 28–30.

6. Понтрягин Л. С. Обыкновенные дифференциальные уравнения / Л. С. Понтрягин. – М. : Наука, 1977. – 664 с.

7. Шейдеггер А. Физика течения жидкостей через пористые среды / А. Шейдеггер. – М., 1960. – 137 с.

8. Молчанов В. Ф. Дослідження пропускної спроможності фільтрувальних сіток / В. Ф. Молчанов // Збірник наукових праць Дніпродзержинського державного технічного університету (технічні науки). – Дніпродзержинськ : ДДТУ, 2012. – Випуск № 3 (20). – С. 61–65.

9. Жужиков В. А. Фильтрование. Теория и практика разделения суспензий / В. А. Жужиков. – М. : Химия, 1968. – 411 с.

10. Молчанов В. Ф. Постановка и решение нестационарной граничной задачи фильтрации жидкостей в пористой среде / В. Ф.Молчанов // Збірник наукових праць Дніпровського державного технічного університету (технічні науки). – Кам'янське : ДДТУ, 2018. – Випуск № 1 (32). – С. 53–58.

Стаття надійшла до редакції 11.03.2019 р.